



## Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a IX-a

### SOLUȚII

**Problema 1.** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică cu rația  $\frac{1}{3}$ , iar termenii  $a_1$  și  $a_n$  sunt numere naturale nenule. Știind că suma primilor  $n$  termeni ai progresii aritmetice este 2010, se cere:

- Să se determine  $n$ .
- Să se determine numărul termenilor din sumă care sunt numere naturale.

**Milu Cârmaciu, profesor, Galați**

**Soluție:** a) Fie  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2010 \Rightarrow a_1 + a_n = \frac{4020}{n}$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, n \geq 1 \Rightarrow a_n - a_1 = \frac{n-1}{3}$$

$$\text{Atunci } a_1 = \frac{2010}{n} - \frac{n-1}{6}; a_n = \frac{n-1}{6} + \frac{2010}{n};$$

Dar  $a_1, a_n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in D_{2010}$  și  $n = 6 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 67$ . Așadar este  $a_1 = 19; a_{67} = 41$ .

**b)** Așadar,  $a_1 = 19; a_{67} = 41$ . Dacă rația este  $\frac{1}{3}$ , atunci termenii care sunt numere naturale sunt:  $a_1 = 19; a_4 = 20; a_7 = 21; \dots; a_{67} = 41$ . Numărul lor este 23.

**Problema 2.** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația  $\frac{1}{\{x\}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]}$ .

(  $[x]$  și  $\{x\}$  reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real  $x$  )

\* \* \*

**Soluție:** Condiții:  $x \notin \mathbb{Z} \cup (0,1)$

Dacă  $x < 0 \Rightarrow$  ecuația nu are soluții ( $\frac{1}{\{x\}} > 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]} < 0$ );

$$\text{Dacă } x > 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \\ [x] \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{[x]} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]} < 1, \text{ iar } \frac{1}{\{x\}} > 1 (\text{Fals}) \Rightarrow \text{ecuația nu are soluții.}$$

Dacă  $x \in (1, 2) \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in (1, 2); x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin (1, 2)$

Soluția ecuației este  $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**Problema 3.** Fie mulțimea  $M = \{x^2 + y^2 / x, y \in \mathbb{Z}\}$ .

- Să se demonstreze că  $2011 \notin M$  și  $2048 \in M$ .
- Să se demonstreze implicația:  $(\forall) p \in M, (\forall) q \in M \Rightarrow p \cdot q \in M$ .
- Să se determine submulțimile finite  $M'$  ale mulțimii  $M$ , cu proprietatea:  
 $(\forall) p \in M', (\forall) q \in M' \Rightarrow p \cdot q \in M'$ .

**Prelucrare Constantin Ursu, profesor, Galați**

**Soluție :**

a) Fie  $x \in \mathbb{Z}$ .

$$1. \text{ Dacă } x = 2 \cdot k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 4 \cdot k^2 \Rightarrow x^2 \in M_4.$$

$$2. \text{ Dacă } x = 2 \cdot k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 \Rightarrow x^2 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1 \Rightarrow x^2 \in M_4 + 1.$$

Dacă  $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2, y^2 \in M_4$  sau  $M_4 + 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \in M_4$  sau  $M_4 + 1$  sau  $M_4 + 2$ .

În concluzie,  $x^2 + y^2 \notin M_4 + 3$ .

Numărul  $2011 = 502 \cdot 4 + 3 \in M_4 + 3 \Rightarrow 2011 \notin M$ .  $2048 = (2^5)^2 + (2^5)^2 \in M$ .

b)

Fie  $p, q \in M, p = x_1^2 + y_1^2, q = x_2^2 + y_2^2, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ .

$$p \cdot q = (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2)^2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)^2 \in M.$$

- c) Presupunem că  $M'$  conține pe  $a \in \mathbb{N}^*, a > 1$ , atunci va conține pe  $a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$ . Aceste elemente nu se repetă, deoarece dacă  $a^i = a^j, i < j$ , ar rezulta că  $a^{j-i} = 1 \Rightarrow a = 1$  (*fals*). Deci mulțimea  $M'$  nu ar fi mulțime finită. În concluzie, mulțimea  $M'$  poate să conțină numai pe 0 sau 1. Așadar,  $M' = \{0\}; M' = \{1\}; M' = \{0, 1\}$ .

**Problema 4.** Fie triunghiul  $\triangle ABC$  și punctele  $M, N, P, Q$  astfel încât:

$\overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \overrightarrow{MC}$ ;  $\overrightarrow{CP} = \beta \cdot \overrightarrow{PA}$ ;  $\overrightarrow{AQ} = \gamma \cdot \overrightarrow{QB}$ ;  $\overrightarrow{BN} = m \cdot \overrightarrow{CN}$ , unde  $\alpha, \beta, \gamma$  și  $m$  sunt numere reale strict pozitive. Se cere:

- Dacă  $\alpha = \beta = \gamma$ , să se demonstreze că triunghiul  $\triangle ABC$  are același centru de greutate ca și triunghiul  $\triangle MPQ$ .
- Să se determine relația dintre numerele  $\alpha, \beta, \gamma$  astfel încât dreptele  $AM, CQ, BP$  să fie concurente.
- Să se determine în funcție de  $m$  și  $\gamma$  raportul în care dreapta  $NQ$  împarte segmentul  $(AC)$ , cazul în care dreapta  $NQ$  intersectează segmentul  $(AC)$ .

**Constantin Ursu, profesor, Galați**

**Soluție:** a) Se știe că  $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow (\forall) O \in \text{planului, avem: } \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}}{k+1}, k \neq -1.$

$$\text{Dacă } \alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \alpha \cdot \overrightarrow{OC}}{\alpha+1}; \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} + \alpha \cdot \overrightarrow{OA}}{\alpha+1}; \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{OB}}{\alpha+1}.$$

Dacă  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $\triangle ABC \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ , și dacă

$G'$  este centrul de greutate al triunghiului  $\triangle MPQ$ , atunci  $\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$ .

Deci

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG'} &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{OB} + \alpha \cdot \overrightarrow{OC}}{\alpha+1} + \frac{\overrightarrow{OC} + \alpha \cdot \overrightarrow{OA}}{\alpha+1} + \frac{\overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{OB}}{\alpha+1} \right) \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{OG'} &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{OB} + \alpha \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} + \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{OB}}{\alpha+1} \right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \end{aligned}$$

În concluzie,  $\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OG} \Leftrightarrow G = G'$ .

- Se aplică teorema lui Ceva: dreptele  $AM, BP, CQ$  sunt concurente dacă și

$$\text{numai dacă } \frac{BM}{MC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{QA}{QB} = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1.$$

- Din ipoteză,  $m > 0$ , de unde rezultă că punctul  $N \notin [BC]$ . Se aplică teorema lui Menelaus în triunghiul  $\triangle ABC$  pentru punctele  $N, S, Q$  cu

$$NQ \cap (AC) = \{S\}: \frac{AS}{SC} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{QB}{QA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{SC} = \frac{NB}{NC} \cdot \frac{QA}{QB} = m \cdot \gamma. \text{ Deci raportul}$$

căutat este  $-m \cdot \gamma$ , deoarece  $S \in (AC)$ .

**Notă.** Elevii care vor da răspunsul  $m \cdot \gamma$  nu vor fi depunțați.